Lorentz空間のJames定数について (バナッハ空間及び関数空間論の最近の進展とその応用)

三谷, 健一; 斎藤, 吉助

数理解析研究所講究録
第 1615 巻 2008 年 88-94

Lorentz 空間の James 定数について[1]

新潟工科大学工学部　三谷　健一 (Ken-Ichi Mitani)
新潟大学理学部　斎藤　吉助 (Kichi-Suke Saito)

1　序文

バナッハ空間において von Neumann-Jordan 定数や James 定数などの様々なバナッハ空間の幾何学的定数が存在する [1, 2]. これらはバナッハ空間の幾何学的構造を調べる上で重要であり, 不動点理論などに関連して急速な発展を遂げている.

定義 1 ([2]) X をバナッハ空間とする. このとき James 定数 $J(X)$ を以下のように定義する:

$$J(X) = \sup\left\{ \min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} : x, y \in X,\ \|x\| = \|y\| = 1\right\}.$$

命題 1 ([2]) (i) 任意のバナッハ空間 X に対して $\sqrt{2} \leq J(X) \leq 2$.
(ii) X がヒルベルト空間ならば $J(X) = \sqrt{2}$.
(iii) $J(X) < 2$ であることと X が uniformly non-square であることは同値である. 即ち, ある $\delta > 0$ に対して

$$\|(x-y)/2\| > 1-\delta,\ \|x\| = \|y\| = 1 \Rightarrow \|(x+y)/2\| \leq 1-\delta$$

である.
(iv) $1 \leq p \leq \infty,\ 1/p + 1/q = 1,\ \dim L_p \geq 2$ とする. このとき

$$J(L_p) = \max\{2^{1/p}, 2^{1/q}\}.$$

[1]2000 *Mathematics Subject Classification.* 46B20.

Keywords. James constant, Lorentz sequence spaces, absolute normalized norm

2001 年, Kato-Maligranda[3] は 2 次元 Lorentz 数列空間 $d^{(2)}(\omega, q)$ における von Neumann-Jordan 定数や James 定数を考え, von Neumann-Jordan 定数については w, q の全ての場合における定数の値を計算したが, James 定数については $q \geq 2$ の場合を与えた. 残りの場合については [5, 10] によって部分的に解決されたが, [6] は全ての場合を計算した.

本講演では, absolute normalized ノルムに関するよく知られた結果を用いて, 2 次元 Lorentz 数列空間の dual norm を与え, さらに 2 次元 Lorentz 数列空間の双対空間における James 定数の値の結果を述べる.

2 Absolute normalized norm

$\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が absolute であるとは, 任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\|(|x|, |y|)\| = \|(x, y)\|$$

が成り立つときを言う. また, $\|\cdot\|$ が normalized であるとは,

$$\|(1,0)\| = \|(0,1)\| = 1$$

であるときを言う. ℓ_p ノルムは最も基本的な例である:

$$\|(x,y)\|_p = \begin{cases} (|x|^p + |y|^p)^{1/p}, & \text{if} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \max\{|x|, |y|\}, & \text{if} \quad p = \infty. \end{cases}$$

AN_2 を $\mathbb{R}^2$ 上の absolute normalized norm 全体とする. 任意の $\|\cdot\| \in AN_2$ に対して

$$\psi(t) = \|(1-t, t)\| \tag{1}$$

とおくと, ψ は区間 [0,1] 上連続凸関数で $\psi(0) = \psi(1) = 1$ かつ $\max\{1-t, t\} \leq \psi(t) \leq 1$ を満たす. このような関数全体を Ψ_2 とする. また, 任意の $\psi \in \Psi_2$ に対して

$$\|(x,y)\|_\psi = \begin{cases} (|x| + |y|)\psi\left(\dfrac{|y|}{|x|+|y|}\right), & \text{if} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{if} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

とすると, $\|\cdot\| \in AN_2$ かつ (1) を満たす. したがって AN_2 と Ψ_2 は 1 対 1 に対応する. たとえば, $\|\cdot\|_p$ ノルムに対応する Ψ_2 の中の関数を ψ_p とすると,

$$\psi_p(t) = \begin{cases} ((1-t)^p + t^p)^{1/p}, & \text{if} \quad 1 \le p < \infty, \\ \max\{1-t, t\}, & \text{if} \quad p = \infty. \end{cases}$$

さらに $\|\cdot\|_\psi$ の dual norm を考える. $\psi \in \Psi_2$ に対して, $\|\cdot\|_\psi^*$ を $\|\cdot\|_\psi$ の dual norm とする. すなわち,

$$\|x\|_\psi^* = \sup\{|\langle x, y\rangle| : y \in \mathbb{R}^2,\ \|y\|_\psi = 1\} \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

このとき $\|\cdot\|_\psi^* \in AN_2$ であり, 対応する Ψ_2 の中の関数 ψ^* は

$$\psi^*(t) = \sup_{0 \le s \le 1} \frac{(1-s)(1-t) + st}{\psi(s)} \quad (0 \le t \le 1)$$

である ([4]). 明らかに, $1 \le p \le \infty$, $1/q + 1/p = 1$ のとき $\psi_p^* = \psi_q$ が成り立つ.

3 Lorentz 空間の dual norm

定義 2 $0 < \omega < 1,\ 1 \le q < \infty$ とする. このとき 2 次元 Lorentz 数列空間 $d^{(2)}(\omega, q)$ であるとは, 次のノルムを持つ $\mathbb{R}^2$ を言う：

$$\|(x, y)\|_{\omega,q} = (x^{*q} + \omega y^{*q})^{1/q},$$

ここで $x^* = \max\{|x|, |y|\}$, $y^* = \min\{|x|, |y|\}$ である.

今, $d^{(2)}(\omega, q)$ の双対空間を考える. $q = 1$ については $d^{(2)}(\omega, 1)^*$ は次のノルムによって与えられた 2 次元 Marcinkiewicz 空間 m_ω であることが知られている ([3]).

$$\|(x, y)\|_{m_\omega} = \max\left\{x^*, \frac{x^* + y^*}{1+\omega}\right\}.$$

本章では, すべての q に関して dual norm を決定する.

明らかに $\|\cdot\|_{\omega,q}$ は $\mathbb{R}^2$ 上 absolute normalized ノルムである, 即ち, $\|\cdot\|_{\omega,q} \in AN_2$. また $\|\cdot\|_{\omega,q}$ は次の意味で対称である, 即ちすべての $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ において

$\|(x,y)\|_{\omega,q} = \|(y,x)\|_{\omega,q}$. このとき, $\|\cdot\|_{\omega,q}$ に対応する Ψ_2 の中の関数 $\psi_{\omega,q}$ は次のように与えられる:

$$\psi_{\omega,q}(t) = \begin{cases} ((1-t)^q + \omega t^q)^{1/q}, & \text{if} \quad 0 \le t \le 1/2, \\ (t^q + \omega(1-t)^q)^{1/q}, & \text{if} \quad 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

$d^{(2)}(\omega,q)$ の dual norm $\|\cdot\|^*_{\omega,q}$ を得るために $\psi^*_{\omega,q}$ を求める.

定理 1 ([7]) $0<\omega<1$ とする. (i) $1<q<\infty$ のとき

$$\psi^*_{\omega,q}(t) = \begin{cases} ((1-t)^p + \omega^{1-p} t^p)^{1/p}, & \text{if} \quad 0 \le t < \frac{\omega}{1+\omega}, \\ (1+\omega)^{1/p-1}, & \text{if} \quad \frac{\omega}{1+\omega} \le t < \frac{1}{1+\omega}, \\ (t^p + \omega^{1-p}(1-t)^p)^{1/p}, & \text{if} \quad \frac{1}{1+\omega} \le t \le 1, \end{cases}$$

ここで $1/p + 1/q = 1$.

(ii) $q=1$ のとき

$$\psi^*_{\omega,1}(t) = \begin{cases} 1-t, & \text{if} \quad 0 \le t < \frac{\omega}{1+\omega}, \\ \frac{1}{1+\omega}, & \text{if} \quad \frac{\omega}{1+\omega} \le t < \frac{1}{1+\omega}, \\ t, & \text{if} \quad \frac{1}{1+\omega} \le t \le 1. \end{cases}$$

さらに

$$\|(x,y)\|^*_{\omega,q} = \|(x,y)\|_{\psi^*_{\omega,q}} = (|x|+|y|)\psi^*_{\omega,q}\left(\frac{|y|}{|x|+|y|}\right)$$

より次が得られる.

定理 2 ([7]) $0<\omega<1$ とする.

(i) $1<q<\infty$ のとき

$$\|(x,y)\|^*_{\omega,q} = \begin{cases} (|x|^p + \omega^{1-p}|y|^p)^{1/p} & \text{if } \omega|x| \ge |y|, \\ (1+\omega)^{1/p-1}(|x|+|y|) & \text{if } \omega|x| \le |y| \le \omega^{-1}|x|, \\ (|y|^p + \omega^{1-p}|x|^p)^{1/p} & \text{if } \omega^{-1}|x| \le |y|. \end{cases}$$

(ii) $q=1$ のとき

$$\|(x,y)\|_{\omega,1}^{*}=\begin{cases}\max\{|x|,\omega^{-1}|y|\} & \text{if } \omega|x|\ge|y|,\\ \frac{1}{1+\omega}(|x|+|y|) & \text{if } \omega|x|\le|y|\le\omega^{-1}|x|,\\ \max\{\omega^{-1}|x|,|y|\} & \text{if } \omega^{-1}|x|\le|y|.\end{cases}$$

即ち $\|(x,y)\|_{\omega,1}^{*}=\|(x,y)\|_{m_\omega}$.

4 $d^{(2)}(\omega,q)^*$ の James 定数

Kato-Maligranda [3] は $d^{(2)}(\omega,q)$ における James 定数を考察し, $q\ge 2$ のとき次のように計算した.

定理 3 ([3]) $q\ge 2$ とする. このとき

$$J\big(d^{(2)}(\omega,q)\big)=2\left(\frac{1}{1+\omega}\right)^{1/q}.$$

$1\le q<2$ のとき Mitani-Saito-Suzuki [6] によって次のように与えられた.

定理 4 ([6]) $1\le q<2$ とする. (i) $0<\omega\le(\sqrt{2}-1)^{2-q}$ のとき

$$J\big(d^{(2)}(\omega,q)\big)=2\left(\frac{1}{1+\omega}\right)^{1/q}.$$

(ii) $(\sqrt{2}-1)^{2-q}<\omega<1$ のとき次を満たす一意の解 s_0 $(0<s_0<\omega^{1/(2-q)})$ が存在する：

$$(1+s_0)^{q-1}(1-\omega s_0^{q-1})=\omega(1-s_0)^{q-1}(1+\omega s_0^{q-1}).$$

(ii-a) $(\sqrt{2}-1)^{2-q}<\omega\le\sqrt{2}^q-1$ のとき

$$J\big(d^{(2)}(\omega,q)\big)=\max\left\{\left(\frac{2(1+s_0)^{q-1}}{1+\omega s_0^{q-1}}\right)^{1/q},\ 2\left(\frac{1}{1+\omega}\right)^{1/q}\right\}.$$

(ii-b) $\sqrt{2}^q-1<\omega<1$ のとき

$$J\big(d^{(2)}(\omega,q)\big)=\left(\frac{2(1+s_0)^{q-1}}{1+\omega s_0^{q-1}}\right)^{1/q}.$$

$d^{(2)}(\omega, q)$ の双対空間における定数を考える.

定理 5 ([5]) $\psi \in \Psi_2$ が $t = 1/2$ で対称とする. このとき

$$J(\|\cdot\|_\psi) = \max_{0 \le t \le 1/2} \frac{2-2t}{\psi(t)} \psi\left(\frac{1}{2-2t}\right).$$

特に $\psi = \psi^*_{\omega,q}$ のとき

$$J\big(d^{(2)}(\omega, q)^*\big) = J(\|\cdot\|_{\psi^*_{\omega,q}}) = \max_{0 \le t \le 1/2} \frac{2-2t}{\psi^*_{\omega,q}(t)} \psi^*_{\omega,q}\left(\frac{1}{2-2t}\right),$$

上式において, 最大値を求めることにより $d^{(2)}(\omega, q)^*$ の James 定数を計算することができる.

定理 6 ([7]) $1 < q < 2,\ 1/p + 1/q = 1$ とする. (i). $0 < \omega \le (\sqrt{2}-1)^{2-q}$ のとき

$$J\big(d^{(2)}(\omega, q)^*\big) = 2\left(\frac{1}{1+\omega}\right)^{1/q}.$$

(ii). Let $(\sqrt{2}-1)^{2-q} < \omega < 1$. このとき一意の解 s_1 が存在し,

$$(1+s_1)^{p-1}(1-\omega^{1-p}s_1^{p-1}) = \omega^{1-p}(1-s_1)^{p-1}(1+\omega^{1-p}s_1^{p-1}), \quad \omega^{\frac{1}{2-q}} < s_1 \le \omega.$$

(ii-a) $(\sqrt{2}-1)^{2-q} < \omega \le \sqrt{2}^q - 1$ ならば

$$J\big(d^{(2)}(\omega, q)^*\big) = \max\left\{2\left(\frac{1}{1+\omega}\right)^{1/q}, \left(\frac{2(1+s_1)^{p-1}}{1+\omega^{1-p}s_1^{p-1}}\right)^{1/p}\right\}.$$

(ii-b) $\sqrt{2}^q - 1 < \omega < 1$ ならば

$$J\big(d^{(2)}(\omega, q)^*\big) = \left(\frac{2(1+s_1)^{p-1}}{1+\omega^{1-p}s_1^{p-1}}\right)^{1/p}.$$

定理 7 ([7]) (i) $0 < \omega < \sqrt{2}-1$ のとき

$$J\big(d^{(2)}(\omega, 1)^*\big) = \frac{2}{1+\omega}.$$

(ii) $\sqrt{2}-1 \le \omega < 1$ のとき

$$J\big(d^{(2)}(\omega, 1)^*\big) = 1+\omega.$$

参考文献

[1] J. A. Clarkson, The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue space, Ann. of Math. 38 (1937) 114-115.

[2] J. Gao and K.S. Lau, On the geometry of spheres in normed linear spaces, J. Aust. Math. Soc. A 48 (1990) 101–112.

[3] M. Kato and L. Maligranda, On James and Jordan-von Neumann constants of Lorentz sequence spaces, J. Math. Anal. Appl. 258 (2001) 457–465.

[4] K. Mitani, S. Oshiro and K.-S. Saito, Smoothness of ψ-direct sums of Banach spaces, Math. Inequal. Appl. 8 (2005) 147–157.

[5] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, The James constant of absolute norms on $\mathbb{R}^2$, J. Nonlinear Convex Anal. 4 (2003) 399–410.

[6] K.-I. Mitani, K.-S. Saito and T. Suzuki, On the calculation of the James constant of Lorentz sequence spaces, J. Math. Anal. Appl. 343 (2008) 310–314.

[7] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, Dual of two dimensional Lorentz sequence spaces, preprint.

[8] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, Von Neumann-Jordan Constant of absolute normalized norms on $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl. 244 (2000) 515–532.

[9] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, Absolute norms on $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl. 252 (2000) 879–905.

[10] T. Suzuki, A. Yamano and M. Kato, The James constant of 2-dimensional Lorentz sequence spaces, Bull. Kyushu Inst. Technol. Pure Appl. Math. 53 (2006) 15–24.